Université Paul Sabatier 3$^{\text{ème}}$ année de Licence Physique et Applications 2011/2012

Contrôle Terminal de Mathématiques pour la Physique

Lundi 11 juin 2012 – Deuxième session – Durée : 2 heures

⋆⋆⋆

Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. Les téléphones portables doivent être éteints et ne pas figurer sur la table. Le sujet comporte **une** page. Tous les exercices sont indépendants.

⋆

Exercice 1

Une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est dite homogène de degré n si elle vérifie

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}\ , \quad f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z). \tag{1}$$

1) Montrer que la fonction g définie par $g(x,y,z) = z^2 \ln(x/y)$ est homogène. On précisera le degré d'homogénéité n.

2) Démontrer la relation d'Euler :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ , \quad x\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) + y\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) + z\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = nf(x,y,z) \quad .$$

Pour cela, on pourra dériver partiellement Eq. (1) par rapport à t puis poser $t=1$. On veillera pour ce faire d'introduire toutes les **fonctions nécessaires** et de préciser la ou les **règle(s) de la chaîne utilisée(s)** afin d'écrire des relations non ambigües.

⋆

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante $L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}i(t) + R\,i(t) = f(t)$, où L et R sont deux constantes positives et f une fonction donnée, dite terme de source. On donne également les conditions initiales $i(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}i(0) = 0$.

1) Que représente physiquement cette équation différentielle ?

2) On suppose dans cette question que $f(t) = e^{-at}H(t)$ où H est la fonction de Heaviside et a une constante strictement positive. Que signifie physiquement la présence de H dans le terme de source ? Résoudre l'équation différentielle en utilisant la transformée de Laplace.

3) On considère de nouveau un terme de source quelconque f. On note $F(p)$ et $I(p)$ les transformées de Laplace respectives de $f(t)$ et $i(t)$. Comment s'écrit $I(p)$ en fonction de p, L, R et $F(p)$? Comment peut-on formellement écrire $i(t)$ sous forme d'un produit de convolution ? Retrouver l'expression de $i(t)$ obtenue à la question précédente en calculant explicitement ce produit de convolution dans le cas où $f(t) = e^{-at}H(t)$.

⋆

Exercice 3

Soit Π la fonction définie par $\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

1) Calculer la transformée de Fourier de Π.

2) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k}{k} = \pi$.

3) En précisant le produit scalaire et l'espace de Hilbert considérés, montrer qu'on a aussi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2} = \pi$.

⋆⋆⋆